

## Calcul intégral

### I) Intégrale d'une fonction sur un segment.

**Définition** : Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a ; b]$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a ; b]$  .

Le nombre  $F(b) - F(a)$  est appelé intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f$ , on le note  $\int_a^b f(x)dx$  .

**Notation**: Par commodité, le nombre  $F(b) - F(a)$  s'écrit aussi  $[F(x)]_a^b$ . C'est-à-dire:  $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

**Conséquences** :  $\int_a^a f(x)dx = 0$  et  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

**Propriété 1** : Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $I$ , alors quel que soit l'élément  $a$  de  $I$ ,

La fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  est la primitive de  $f$  sur  $I$  qui s'annule en  $a$ .

### II) Propriétés de l'intégrale.

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle  $I$ , et  $a, b$  et  $c$  trois réels de  $I$ . et soit  $k \in \mathbb{R}$ .

▪ **Linéarité de l'intégrale**:  $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$  et  $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$

▪ **Additivité ou relation de Chasles** :  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

▪ **Positivité de l'intégrale** : Si  $f(x) \geq 0$  sur  $I$  et si  $a \leq b$ , alors  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

▪ **Intégrale et ordre** : Si  $f(x) \leq g(x)$  sur  $I$  et si  $a \leq b$ , alors  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ .

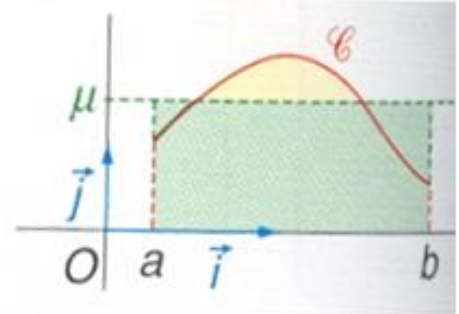
▪ **Inégalité de la moyenne**: Si  $m \leq f(x) \leq M$  sur  $I$  et si  $a \leq b$ , alors :  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$  .

▪ **Valeur moyenne d'une fonction** :

Si  $a < b$  alors le nombre  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$  est appelé **valeur moyenne** de  $f$  sur l'intervalle  $[a; b]$ .

**Remarques** :

- La valeur moyenne de  $f$  est comprise entre  $m$  et  $M$  .
- Si le plan est rapporté à un repère orthonormé et si  $f(x) \geq 0$  sur  $I$ , alors  $\mu$  est la hauteur du rectangle de base  $b-a$  et d'aire :  $\int_a^b f(x)dx$



### III) Techniques de calcul d'une intégrale.

▪ **Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive.**

La connaissance des primitives de fonctions usuelles permet de calculer des intégrales. (Tableau page 14)

▪ **Intégration par parties**: Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ .

Alors  $(uv)' = u'v + uv'$ , donc  $uv' = (uv)' - u'v$ . Or une primitive de  $(uv)'$  est  $uv$ ,

d'où  $\int_a^b u'(x) \times v(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)dx$  (Formule d'intégration par parties)

▪ **Décomposition de fractions en éléments simples.**

▪ **Intégrale - Parité** : Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[-a; a]$ .

Si  $f$  est **paire**, alors  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$  Si  $f$  est **impaire**, alors  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

▪ **Intégrale - Périodicité** : Soit  $f$  une fonction continue et périodique sur  $\mathbb{R}$  de période  $T$ .

Alors, quels que soient les réels  $a$  et  $b$  on a :  $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$  et  $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$

▪ **Linéarisation des fonction trigonométrique.** (Nombres complexes)

**IV) Quelques applications du calcul intégral.**

**Aires de surfaces planes**

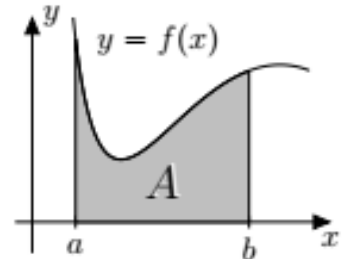
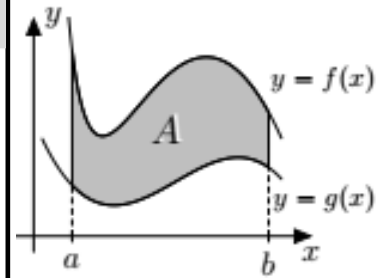
Supposons que le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $[a; b]$ .

L'aire de la surface délimitée par  $(C_f), (C_g)$  et les droites  $(D) : x = a$  et  $(\Delta) : x = b$

Est égale à  $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$  (unité d'aire).

- **Cas particulier :** L'aire de la surface délimitée par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites  $(D) : x = a$  et  $(\Delta) : x = b$  est  $\int_a^b |f(x)| dx$  (u.a)
- **unité d'aire** =  $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$



**Volume d'un solide de révolution**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$ .

En faisant pivoter la courbe de  $f$  autour de l'axe (Ox), on engendre un solide de révolution, dont

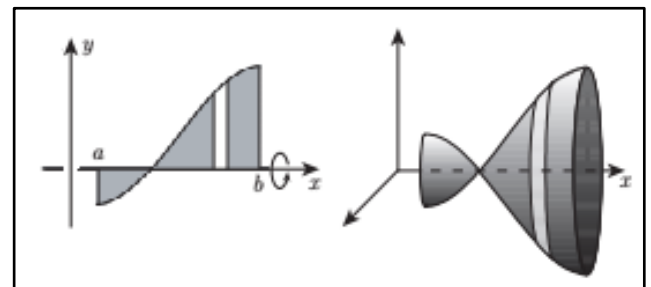
le volume est  $\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$  (unité de volume)

**Remarques**

- 1)  $f$  ne doit pas être nécessairement positive.
- 2) En intervertissant les rôles de  $x$  et de  $y$ , on obtient un solide de révolution engendré par une rotation autour de l'axe (Oy)

Dans ce cas, on a :  $V = \pi \int_a^b (g(x))^2 dx$  (u.v)

- **unité de volume** =  $\|\vec{i}\|^3$



- 1) Déterminer la fonction correspondante au demi-cercle de rayon  $r$  et de centre l'origine du repère.
- 2) En utilisant les intégrales, en déduire la formule de l'aire d'un disque de rayon  $r$ .
- 3) En utilisant les intégrales de révolution, en déduire la formule du volume d'une sphère de rayon  $r$ .